



## ОРИГИНАЛЬНЫЕ СТАТЬИ

УДК: 532.51

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

# Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости

С. Н. Аристов, В. В. Привалова, Е. Ю. Просвиряков

Найдено новое точное решение двумерных уравнений Обербека – Буссинеска. Полученные аналитические выражения гидродинамических полей описывают конвективное течение Куэтта. Течение жидкости возникает при неоднородном распределении скоростей и квадратичного источника тепла на верхней границе бесконечного слоя вязкой несжимаемой жидкости. Для нахождения точного решения уравнений Обербека – Буссинеска введено два характерных масштаба. Использование анизотропного слоя позволяет исследовать крупномасштабные течения жидкостей при больших значениях чисел Грасгофа. Показана связь решений, описывающих квадратичный нагрев границ, с краевыми задачами, позволяющими изучать движения жидкостей, в которых температура распределена по линейному закону. Приведен анализ полиномиальных решений, описывающих естественную конвекцию жидкости. Показано существование точек, в которых гидродинамические поля обращаются в нуль внутри слоя жидкости. Таким образом, приведенный класс точных решений позволяет описать противотечения в жидкости и расслоения полей давления и температуры.

Ключевые слова: течение Куэтта, линейный нагрев, квадратичный нагрев, конвекция, точное решение, полиномиальное решение

---

Получено 22 июня 2015 года

После доработки 14 мая 2016 года

---

Работа выполнена при поддержке ФСР МФП НТС (программа СТАРТ) и ИВФ РТ (программа СТАРТ).

---

Аристов Сергей Николаевич

[asn@icmm.ru](mailto:asn@icmm.ru)

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1

Привалова Валентина Викторовна

[valentprival@gmail.com](mailto:valentprival@gmail.com)

Институт машиноведения УрО РАН, 620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

Просвиряков Евгений Юрьевич

[evgen\\_pros@mail.ru](mailto:evgen_pros@mail.ru)

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева

420111, Россия, г. Казань, ул. Карла Маркса, д. 10

Институт машиноведения УрО РАН, 620049, Россия, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34

## Введение

Исследование системы уравнений, описывающих движение диссипативных несжимаемых жидкостей, основывается на исследовании решений векторного уравнения Навье–Стокса, дополненного уравнением несжимаемости [13, 15]. Существует точка зрения, что в качестве исходного уравнения исследователи жидкости всегда используют уравнение Эйлера, описывающее течения идеальной жидкости, добавляя при этом различные слагаемые, учитывающие диссипативные эффекты сплошной среды [15]. В качестве примера можно указать использование тензора вязких напряжений, подчиняющихся закону Ньютона (ньютоновские жидкости) [15], тензора, связывающего компоненты напряжений с производными деформаций (неньютоновские жидкости) [23]. Производя дальнейшие уточнения движений жидкости, можно учесть влияние температуры, концентрации, электромагнитных полей и других факторов [1, 2, 8, 9, 12–16, 23]. Очевидно, введение новых слагаемых в уравнения Эйлера (или в уравнения Навье–Стокса) позволяет описывать движения с большей точностью. Однако вклад дополнительных слагаемых усложняет вид системы уравнений, которые принадлежат в общем случае к системам уравнений в частных производных.

В настоящее время проводится большое число исследований по интегрированию уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости различной природы. Такого рода задачи представляют интерес для развития математики, механики и физики [12]. Роль каждого точного решения трудно переоценить [3, 12, 15]. Большинство из решений, полученных при интегрировании уравнений Навье–Стокса, остались в истории под именами первооткрывателей [3, 12, 13, 15]. Полученные решения достаточно быстро были использованы для практических нужд. Достаточно упомянуть вискозиметр Куэтта [3, 25, 35] или формулу Гагена–Пуазёйля, которая применяется для исследования движения жидкости в трубах [3, 27, 34]. Разумеется, что список приложений не заканчивается [3].

Подробнее остановимся на изотермическом течении Куэтта [25]. Точное решение, опубликованное Куэттом в 1890 году, на протяжении ста двадцати пяти лет привлекает внимание специалистов, изучающих течения жидкостей. Наверное, можно говорить о том, что решение, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя недеформируемыми плоскими поступательно движущимися пластинами, является первым точным решением уравнений Навье–Стокса. Как известно, успех получения решения заключался в предположении о переносе импульса в жидкости только вязкими силами; пренебрегают при этом инерционными эффектами. Сделанные Куэттом предположения и физическая симметрия задачи позволили свести систему уравнений Навье–Стокса в нестационарном случае к одномерному уравнению типа теплопроводности. Таким образом, установившиеся течения описываются квадратичным профилем скоростей. Более поздние исследования показали ограниченность данного решения: формально справедливое для произвольного числа Рейнольдса, оно оказалось неприменимым при турбулентных течениях (при очень больших значениях числа Рейнольдса). Это объясняется игнорированием сил инерции при расчете движения жидкости. Обобщение точного решения Куэтта, в котором учитываются силы инерции, приведено в работе [6].

Конвективное течение Куэтта начал изучать Остроумов [19], который описывал его по неопубликованным работам Н. К. Гук. Большее распространение получило решение Бирixa [11], которое объясняло термокапиллярные механизмы адвекции и конвекции в плоском слое вязкой несжимаемой жидкости. Это решение получило большую известность, чем решение Остроумова–Гук [19]. Известны обобщения классического течения Куэтта для неньютоновских жидкостей [23].

Отметим, что подавляющее большинство работ посвящено изучению изотермических жидкостей. В данной работе изучается конвективное классическое течение Куэтта при линейном и квадратичном нагреве границ слоя. Особенности постановки задач для конвекции Бенара – Марангони при линейном распределении температуры на границах слоя обсуждались в работе [7].

## 1. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения плоского движения вязкой несжимаемой жидкости, описывающие влияние температуры на распределение гидродинамических полей, в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + g\beta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $V_x$  и  $V_z$  — скорости, параллельные соответствующим координатным осям прямоугольной декартовой системы координат;  $P$  — отклонение давления от гидростатического, отнесенное к постоянной средней плотности жидкости  $\rho$ ;  $T$  — отклонение от средней температуры;  $\nu$ ,  $\chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности жидкости соответственно;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\beta$  — температурный коэффициент объемного расширения жидкости [13, 15].

Решение системы Обербека – Буссинеска (1.1) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}V_x(x, z, t) &= U(z, t) + xu(z, t), & V_z(z, t) &= w(z, t), \\ P(x, z, t) &= P_0(z, t) + xP_1(z, t) + \frac{x^2}{2}P_{11}(z, t), \\ T(x, z, t) &= T_0(z, t) + xT_1(z, t) + \frac{x^2}{2}T_{11}(z, t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Далее будем рассматривать установившиеся движения. Очевидно, что все коэффициенты в (1.2) зависят только от координаты  $z$ . При последующем изложении конвективного течения Куэтта мы не будем указывать аргумент, от которого зависят функции, входящие в класс решений (1.2).

Решения (1.2) обобщают класс точных решений для скоростей, линейно растущих по горизонтальным координатам. Этот класс решений систематически был изучен Линем в [30], хотя уже Эйлер использовал представление (1.2) для скоростей, описывающих движение газов [10, 18]. В обзоре [3] приведен подробный анализ точных изотермических решений. Там показано, что компоненты давления связаны с коэффициентами представления (1.2) для скоростей. Таким образом, существует связь между давлением и скоростью. Аналогично устанавливается связь скоростей с температурой. Отметим, что такого рода

связи для идеальной жидкости были исследованы в [4]. Решения (1.2), описывающие течения различных жидкостей и газов, подробно рассматривались в работах [3–11, 18, 20, 22–24, 26, 30], групповая классификация решений в рамках рассматриваемого класса представлена в [17, 21, 26, 28, 31–33].

Подставим выражения (1.2) в (1.1), получим систему уравнений для определения неизвестных функций, входящих в класс точных решений (1.2). Полученную систему запишем в том порядке, в котором она будет проинтегрирована:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{dz^2} &= 0, \quad \frac{d^2 T_{11}}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 T_0}{dz^2} + T_{11} = 0, \\ \frac{dP_1}{dz} &= g\beta T_1, \quad \frac{dP_{11}}{dz} = g\beta T_{11}, \\ \nu \frac{d^2 U}{dz^2} &= P_1, \quad \nu \frac{d^2 u}{dz^2} = P_{11}, \quad \frac{dw}{dz} + u = 0, \\ \frac{dP_0}{dz} &= g\beta T_0 + \nu \frac{d^2 w}{dz^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сформулируем граничные условия. На нижней (твердой) границе при  $z = 0$  выполняются условия прилипания:

$$V_x = V_z = 0.$$

Используя формулы (1.2) и линейность условий на границах, получим

$$U = u = w = 0. \quad (1.4)$$

На верхней границе при  $z = h$  справедливы равенства

$$U = W, \quad u = \Omega. \quad (1.5)$$

Перейдем к записи краевых условий для температуры. Нижняя граница является изотермической с отсчетной нулевой температурой

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_{11} = 0. \quad (1.6)$$

При  $z = h$  справедливы граничные условия

$$T_0 = A, \quad T_1 = B, \quad T_{11} = C. \quad (1.7)$$

Граничные условия для давления при  $z = h$  имеют вид

$$P_0 = S, \quad P_1 = 0, \quad P_{11} = 0. \quad (1.8)$$

Точное решение краевой задачи (1.3)–(1.8) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{zB}{h}, \quad T_{11} = \frac{zC}{h}, \quad T_0 = \frac{z}{6h} [(h^2 - z^2)C + A], \\ P_1 &= \frac{g\beta B}{2h} (z^2 - h^2), \quad P_{11} = \frac{g\beta C}{2h} (z^2 - h^2), \\ P_0 &= \frac{g\beta}{24h} [12A(z^2 - h^2) - (h^4 + 5h^3z - 8h^2z^2 + 2z^4)C] + S + \frac{\nu\Omega(h - z)}{h}, \\ U &= \frac{g\beta Bz}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{g\beta Cz}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{\Omega z}{h}, \\ w &= -\frac{g\beta Cz^2}{240h\nu} (25h^3 - 20h^2z + 2z^3) - \frac{\Omega z^2}{2h}. \end{aligned}$$

## 2. Точные решения, описывающие конвективное течение Куэтта при линейном нагреве верхней границы

Рассмотрим сначала нагрев жидкости, реализуемый посредством задания фоновой температуры и градиента температуры. В этом случае для полного описания таких решений необходимо и достаточно рассмотреть четыре типа граничных условий:

$$T_0 = \Theta, \quad T_1 = \Theta, \quad T_{11} = 0, \quad (2.1)$$

$$T_0 = -\Theta, \quad T_1 = -\Theta, \quad T_{11} = 0, \quad (2.2)$$

$$T_0 = -\Theta, \quad T_1 = \Theta, \quad T_{11} = 0, \quad (2.3)$$

$$T_0 = \Theta, \quad T_1 = -\Theta, \quad T_{11} = 0. \quad (2.4)$$

Прокомментируем условие (2.1) при  $z = h$  для градиента температуры  $T_1$ . Обозначив значения на верхней границе у  $T_0$  и  $T_1$  через  $\Theta$ , необходимо помнить, что размерность у них разная. Для температуры  $T_0$  размерность  $\Theta$  выражается в градусах, для градиента температуры  $T_1$  — в градусах, отнесенных к метрам. Строго говоря, для  $T_1$  значение при  $z = h$  следует записать как  $\frac{\Theta}{l}$ . Здесь  $l$  — характерный горизонтальный размер канала. Не ограничивая общности рассуждений, положим  $l$  равным единице.

В таблице 1 приведены решения, полученные для граничных условий (2.1)–(2.4).

Проанализируем полученные решения. Отметим, что функции  $T_0$  и  $T_1$  изменяются по линейному закону с различными коэффициентами пропорциональности, а поведение функций (возрастание или убывание) определяется условиями (2.1)–(2.4) (рис. 1). График  $T_1$  аналогичен графику  $T_0$ . Такая же ситуация с градиентом давления  $P_1$  (рис. 3).

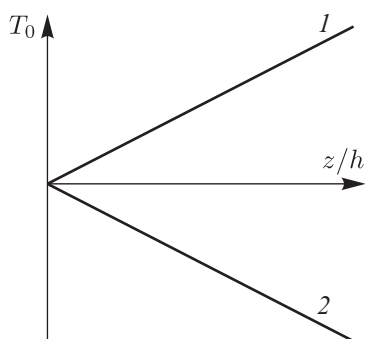


Рис. 1. График  $T_0$ . 1 — при граничных условиях (2.1) и (2.4); 2 — при граничных условиях (2.2) и (2.3).

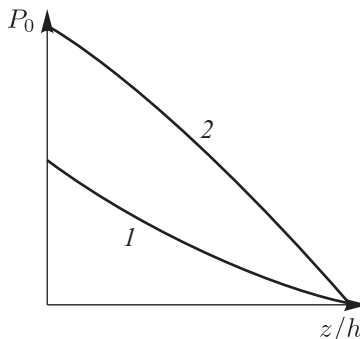


Рис. 2. График  $P_0$ . 1 — при граничных условиях (2.1) и (2.4); 2 — при граничных условиях (2.2) и (2.3).

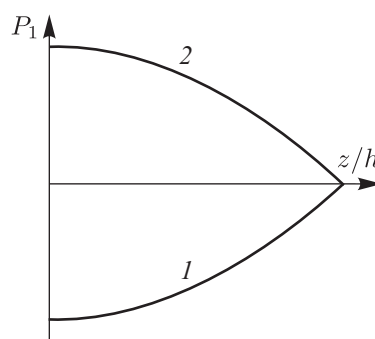


Рис. 3. График  $P_1$ . 1 — при граничных условиях (2.1) и (2.3); 2 — при граничных условиях (2.2) и (2.4).

Скорость  $V_z$  и составляющая градиента  $V_x$  по горизонтальной координате не зависят от способа нагрева (2.1)–(2.4). При  $\Omega > 0$  скорость  $V_z$  монотонно убывает по квадратичному закону по толщине слоя (функция  $u$  линейно возрастает); при противоположном значении  $\Omega$  наблюдается возрастание скорости, параллельной оси  $OZ$  ( $u$  линейно убывает) (рис. 4).

Таблица 1. Решение системы (1.3) для граничных условий (1.4)–(1.8) и (2.1)–(2.4).

Номер условия	Способ нагрева	Решение краевой задачи
(2.1)	$T_0 = \Theta,$ $T_1 = \Theta,$ $T_{11} = 0$	$T_1 = \frac{z\Theta}{h}, \quad T_{11} = 0, \quad T_0 = \frac{z\Theta}{6h},$ $P_1 = \frac{g\beta\Theta}{2h} (z^2 - h^2), \quad P_{11} = 0,$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta (z^2 - h^2)}{2h} + S + \frac{\nu\Omega (h - z)}{h},$ $U = \frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{\Omega z}{h}, \quad w = -\frac{\Omega z^2}{2h},$
(2.2)	$T_0 = -\Theta,$ $T_1 = -\Theta,$ $T_{11} = 0$	$T_1 = -\frac{z\Theta}{h}, \quad T_{11} = 0, \quad T_0 = -\frac{z\Theta}{6h},$ $P_1 = \frac{g\beta\Theta}{2h} (h^2 - z^2), \quad P_{11} = 0,$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta (h^2 - z^2)}{2h} + S + \frac{\nu\Omega (h - z)}{h},$ $U = -\frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{\Omega z}{h}, \quad w = -\frac{\Omega z^2}{2h},$
(2.3)	$T_0 = -\Theta,$ $T_1 = \Theta,$ $T_{11} = 0$	$T_1 = \frac{z\Theta}{h}, \quad T_{11} = 0, \quad T_0 = -\frac{z\Theta}{6h},$ $P_1 = \frac{g\beta\Theta}{2h} (z^2 - h^2), \quad P_{11} = 0,$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta (h^2 - z^2)}{2h} + S + \frac{\nu\Omega (h - z)}{h},$ $U = \frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{\Omega z}{h}, \quad w = -\frac{\Omega z^2}{2h},$
(2.4)	$T_0 = \Theta,$ $T_1 = -\Theta,$ $T_{11} = 0$	$T_1 = -\frac{z\Theta}{h}, \quad T_{11} = 0, \quad T_0 = \frac{z\Theta}{6h},$ $P_1 = \frac{g\beta\Theta}{2h} (h^2 - z^2), \quad P_{11} = 0,$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta (z^2 - h^2)}{2h} + S + \frac{\nu\Omega (h - z)}{h},$ $U = -\frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{\Omega z}{h}, \quad w = -\frac{\Omega z^2}{2h}.$

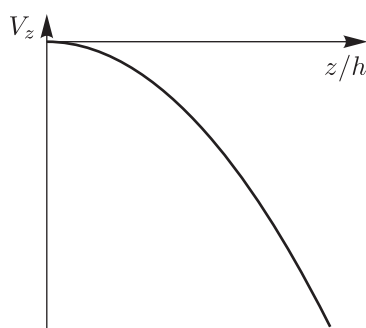
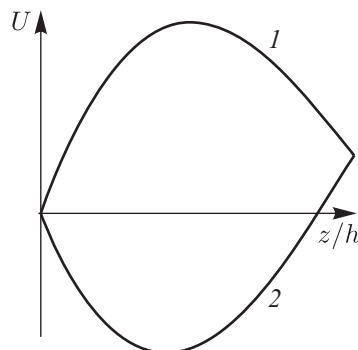
Перейдем к анализу однородного слагаемого скорости, параллельной оси абсцисс. Представим решение при граничных условиях (2.1) следующим образом:

$$U = \frac{z}{h} f\left(\frac{z}{h}\right) = \frac{z}{h} \left[ \frac{g\beta\Theta}{24\nu h^3} \left( 5 - 6\frac{z}{h} + \left(\frac{z}{h}\right)^3 \right) + W \right].$$

При  $W = 0$  функция  $U$  принимает вид

$$U = \frac{g\beta\Theta}{24\nu h^3} \left[ \frac{z}{h} \left( \frac{z}{h} - 1 \right) \left( \left( \frac{z}{h} \right)^2 + \frac{z}{h} - 5 \right) \right].$$

Данная функция имеет два нуля на области определения, которые являются граничными точками:  $z = 0$  и  $z = h$ . Очевидно, что во внутренних точках слоя жидкости скорость


 Рис. 4. График скорости  $V_z$  при граничных условиях (2.1)–(2.4).

 Рис. 5. График функции  $U$ . 1 — при граничных условиях (2.1) и (2.3); 2 — при граничных условиях (2.2) и (2.4).

сонаправлена оси абсцисс, принимая максимальное значение  $U = 1.07607 \frac{g\beta\Theta}{24\nu h^3}$  при  $z = 0.446298h$  (качественный рисунок). В том случае, если  $W = 0$ , то  $U$  принимает только положительные значения внутри слоя, а нулевое значение имеет только на твердой границе (условие прилипания). При задании скорости, направление которой противоположно оси абсцисс ( $W < 0$ ), могут существовать «застойные» точки (скорость принимает нулевые значения). Анализ величины  $U$  показывает, что возможна только одна точка, в которой скорость может обратиться в нуль во внутренних точках области определения  $U$ . Реализация этого случая определяется неравенством

$$\left[ 5 \frac{g\beta\Theta}{24\nu h^3} + W \right] > 0.$$

В этом случае скорость имеет «застойную» точку и принимает как положительные, так и отрицательные значения, достигая при этом максимального значения внутри слоя. При выполнении противоположного неравенства скорость  $U$  будет отрицательна, монотонно убывая на всей области определения (минимум достигается на верхней границе) (рис. 5). Отметим, что для граничных условий (2.2)–(2.4) анализ точных решений краевой задачи аналогичен.

Завершаем исследование решений, описывающих конвективное течение Куэтта при линейном распределении температуры на верхней границе, анализом приведенного давления  $P_0$ . При выполнении неравенства

$$2S < g\beta\Theta h + \nu\Omega$$

давление, отнесенное к плотности, может принимать нулевое значение внутри слоя жидкости. Следовательно, могут существовать при подходящем выборе граничных условий области положительного и отрицательного давления. Отметим, что давление на недеформируемой (нижней) границе может быть меньше, чем на верхней границе. Это возможно при выполнении неравенства

$$2\nu\Omega < g\beta\Theta h.$$

Если строго выполняется противоположное неравенство, то давление на нижней границе (как и в случае гидростатического равновесия) будет больше, чем на свободной поверхности. При выполнении равенства давление принимает одинаковые значения на границе, а внутри слоя оно одного знака (положительное).

### 3. Точные решения, описывающие конвективное течение Куэтта, при нагреве верхней границы по квадратичному закону

Перейдем к изучению конвективного течения Куэтта при квадратичном нагреве свободной границы. Рассмотрим решения краевой задачи (1.3)–(1.8) при следующих граничных условиях на свободной границе:

$$T_0 = \Theta, \quad T_1 = 0, \quad T_{11} = \Theta, \quad (3.1)$$

$$T_0 = -\Theta, \quad T_1 = 0, \quad T_{11} = -\Theta, \quad (3.2)$$

$$T_0 = -\Theta, \quad T_1 = 0, \quad T_{11} = \Theta, \quad (3.3)$$

$$T_0 = \Theta, \quad T_1 = 0, \quad T_{11} = -\Theta. \quad (3.4)$$

Полученные решения для соответствующих граничных условий представлены в таблице 2.

Анализируя полученные решения, заметим, что свойства решений, описывающих поведение функций  $T_{11}$ ,  $P_{11}$ ,  $U$  и  $u$  при квадратичном нагреве, совпадает со свойствами решений  $T_1$ ,  $P_1$ ,  $u$  и  $U$  при линейном нагреве (2.1)–(2.4) соответственно.

Ниже приведены графики функций, отличных по поведению от приведенных выше линейных функций.

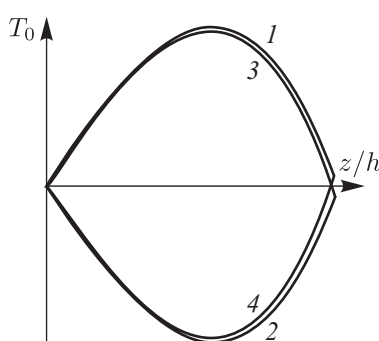


Рис. 6. График функции  $T_0$ . 1 — при граничных условиях (3.1); 2 — при граничных условиях (3.2); 3 — при граничных условиях (3.3); 4 — при граничных условиях (3.4).

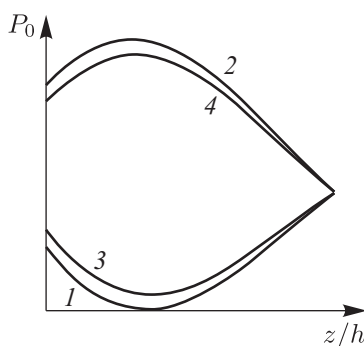


Рис. 7. График функции  $P_0$ . 1 — при граничных условиях (3.1); 2 — при граничных условиях (3.2); 3 — при граничных условиях (3.3); 4 — при граничных условиях (3.4).

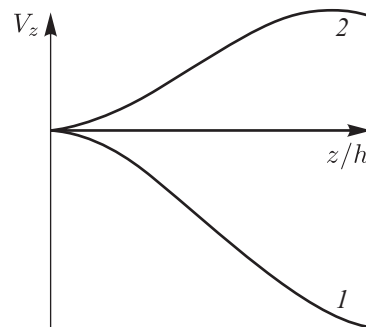


Рис. 8. График функции  $V_z$ . 1 — при граничных условиях (3.1) и (3.3); 2 — при граничных условиях (3.2) и (3.4).

Далее подробно остановимся на краевой задаче (3.1). Температура  $T_0$  при  $h > \sqrt{6}$  может принимать нулевое (отсчетное) значение во внутренних точках слоя жидкости. Данная оценка толщины слоя гарантирует разделение слоя на зоны, в которых температура будет меньше и больше отсчетной. Скорость  $V_z$  на свободной границе при толщине слоя  $h = \sqrt[3]{\frac{120\Omega\nu}{7g\beta\Theta}}$  тождественно равна нулю. Если  $h > \sqrt[3]{\frac{120\Omega\nu}{7g\beta\Theta}}$ , то скорость  $V_z$  сонаправлена с осью, а при выполнении противоположного неравенства имеет противоположное направление. Отметим, что для этой скорости также наблюдаются противотечения, структура которых аналогична профилю скорости  $U$  для краевой задачи (2.1). Это замечание справедливо и для приведенного давления  $P_0$ .



Таблица 2. Решение системы (1.3) для граничных условий (1.4)–(1.8) и (3.1)–(3.4).

Номер условия	Способ нагрева	Решение краевой задачи
(3.1)	$T_0 = \Theta,$ $T_1 = 0,$ $T_{11} = \Theta$	$T_1 = 0, \quad T_{11} = \frac{z\Theta}{h}, \quad T_0 = \frac{z\Theta}{6h} [(h^2 - z^2) + 1],$ $P_1 = 0, \quad P_{11} = \frac{g\beta\Theta}{2h} (z^2 - h^2),$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta}{24h} [12(z^2 - h^2) - (h^4 + 5h^3z - 8h^2z^2 + 2z^4)] +$ $+ S + \frac{\nu\Omega(h-z)}{h},$ $U = \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{\Omega z}{h},$ $w = -\frac{g\beta\Theta z^2}{240h\nu} (25h^3 - 20h^2z + 2z^3) - \frac{\Omega z^2}{2h},$
(3.2)	$T_0 = -\Theta,$ $T_1 = 0,$ $T_{11} = -\Theta$	$T_1 = 0, \quad T_{11} = -\frac{z\Theta}{h}, \quad T_0 = \frac{z\Theta}{6h} [(z^2 - h^2) - 1],$ $P_1 = 0, \quad P_{11} = \frac{g\beta\Theta}{2h} (h^2 - z^2),$ $P_0 = -\frac{g\beta\Theta}{24h} [12(h^2 - z^2) - (h^4 + 5h^3z - 8h^2z^2 + 2z^4)] +$ $+ S + \frac{\nu\Omega(h-z)}{h},$ $U = \frac{Wz}{h}, \quad u = -\frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{\Omega z}{h},$ $w = \frac{g\beta\Theta z^2}{240h\nu} (25h^3 - 20h^2z + 2z^3) - \frac{\Omega z^2}{2h},$
(3.3)	$T_0 = -\Theta,$ $T_1 = 0,$ $T_{11} = \Theta$	$T_1 = 0, \quad T_{11} = \frac{z\Theta}{h}, \quad T_0 = \frac{z\Theta}{6h} [(h^2 - z^2) - 1],$ $P_1 = 0, \quad P_{11} = \frac{g\beta\Theta}{2h} (z^2 - h^2),$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta}{24h} [12(h^2 - z^2) - (h^4 + 5h^3z - 8h^2z^2 + 2z^4)] +$ $+ S + \frac{\nu\Omega(h-z)}{h},$ $U = \frac{Wz}{h}, \quad u = \frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{\Omega z}{h},$ $w = -\frac{g\beta\Theta z^2}{240h\nu} (25h^3 - 20h^2z + 2z^3) - \frac{\Omega z^2}{2h},$
(3.4)	$T_0 = \Theta,$ $T_1 = 0,$ $T_{11} = -\Theta$	$T_1 = 0, \quad T_{11} = -\frac{z\Theta}{h}, \quad T_0 = \frac{z\Theta}{6h} [(z^2 - h^2) + 1],$ $P_1 = 0, \quad P_{11} = \frac{g\beta\Theta}{2h} (h^2 - z^2),$ $P_0 = \frac{g\beta\Theta}{24h} [12(z^2 - h^2) + (h^4 + 5h^3z - 8h^2z^2 + 2z^4)] +$ $+ S + \frac{\nu\Omega(h-z)}{h},$ $U = \frac{Wz}{h}, \quad u = -\frac{g\beta\Theta z}{24h\nu} (5h^3 - 6h^2z + z^3) + \frac{\Omega z}{h},$ $w = \frac{g\beta\Theta z^2}{240h\nu} (25h^3 - 20h^2z + 2z^3) - \frac{\Omega z^2}{2h}.$

## 4. Заключение

В настоящей статье получено обобщение установившегося классического решения Куэтта для неизотермических вязких несжимаемых жидкостей. Изучены два случая распределения температуры на свободной границе: линейный и квадратичные законы. Показано существование «застойных» точек у гидродинамических полей при определенных ограничениях на физические постоянные и граничные условия. Посредством методов локализации корней у полиномиальных решений изучены качественные и количественные свойства полученных точных решений в классе линейно растущих скоростей по горизонтальным координатам.

## Список литературы

- [1] Андреев В. К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препринт № 1-10. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010. 68 с.
- [2] Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ, 2013, т. 54, № 2, с. 3–20.
- [3] Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ, 2009, т. 43, № 5, с. 547–566.
- [4] Аристов С. Н., Полянин А. Д. Новые классы точных решений уравнений Эйлера // Докл. РАН, 2008, т. 419, № 3, с. 328–333.
- [5] Аристов С. Н., Полянин А. Д. Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье – Стокса // Докл. РАН, 2009, т. 427, № 1, с. 35–40.
- [6] Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика, 2014, т. 10, № 2, с. 177–182.
- [7] Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 4, с. 651–657.
- [8] Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: ПГУ, 2006. 155 с.
- [9] Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
- [10] Бетяев С. К. Асимптотические методы классической динамики жидкости. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 516 с.
- [11] Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ, 1966, т. 7, № 3, с. 69–72.
- [12] Броман Г. И., Руденко О. В. Затопленная струя Ландау: Точные решения, их смысл и приложения // УФН, 2010, т. 180, № 1, с. 97–104.
- [13] Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 1972. 392 с.
- [14] Ингель Л. Х., Калашник М. В. Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов // УФН, 2012, т. 182, № 4, с. 379–406.
- [15] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: В 10 тт.: Т. 6: Гидродинамика. 5-е изд. Москва: Физматлит, 2006. 736 с.
- [16] Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Москва: Физматлит, 1959. 699 с.

- [17] Мелешко С. В., Пухначев В. В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье–Стокса // ПМТФ, 1999, т. 40, № 2, с. 24–33.
- [18] Неменьи П. Ф. Современное развитие обратных и полубратных методов в механике сплошной среды // Проблемы механики / Р. Мизес, Т. Карман (ред.). Москва: ИЛ, 1955. С. 234–257.
- [19] Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. Москва: Гостехиздат, 1952. 256 с.
- [20] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Уравнения нестационарного пограничного слоя: Общие преобразования и точные решения // ТОХТ, 2001, т. 35, № 6, с. 563–573.
- [21] Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики, 2006, т. 4, № 1, с. 6–76.
- [22] Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ, 1989, т. 30, № 2, с. 34–40.
- [23] Скульский О. И., Аристов С. Н. Механика аномально вязких жидкостей. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 156 с.
- [24] Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disks: Exact solutions and stability analysis // J. Fluid Mech., 2002, vol. 464, pp. 209–215.
- [25] Couette M. Études sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys., 1890, vol. 21, pp. 433–510.
- [26] Drazin P. G., Riley N. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. 196 pp.
- [27] Hagen G. Über die Bewegung des Wasser in engen zylindrischen Rohren // Pogg. Ann., 1839, vol. 46, pp. 423–442.
- [28] Ibragimov N. H. CRC handbook of Lie group to differential equations: Vol. 2: Applications in engineering and physical sciences. Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1995. 546 pp.
- [29] Kirdyashkin A. G. Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // Int. J. Heat Mass Tran., 1984, vol. 27, no. 8, pp. 1205–1218.
- [30] Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal., 1957, vol. 1, no. 1, pp. 391–395.
- [31] Ludlow D. K., Clarkson P. A., Bassom A. P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations // Stud. Appl. Math., 1999, vol. 103, no. 3, pp. 183–240.
- [32] Ludlow D. K., Clarkson P. A., Bassom A. P. Nonclassical symmetry reductions of the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations // J. Phys. A, 1998, vol. 31, no. 39, pp. 7965–7980.
- [33] Meleshko S. V. A particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations // Nonlinear Dynam., 2004, vol. 36, no. 1, pp. 47–68.
- [34] Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 1840, vol. 11, pp. 961–967, pp. 1041–1048.  
Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres (suite) // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 1841, vol. 12, pp. 112–115.
- [35] Polyanin A. D., Kutepov A. M., Vyazmin A. V., Kazenin D. A. Hydrodynamics, mass and heat transfer in chemical engineering. London: Taylor & Francis, 2002. 406 pp.

## Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer

S. N. Aristov<sup>1</sup>, V. V. Privalova<sup>2</sup>, E. Yu. Prosviryakov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, 1, Ak. Koroleva str., Perm, 614013

<sup>2,3</sup>Institute of Engineering Science UB RAS, 34, Komsomolskaya str., Yekaterinburg, 620049

<sup>3</sup>Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev, 10, Karl Marx str., Kazan, Russia, 420111

<sup>1</sup>asn@icmm.ru, <sup>2</sup>valentprival@gmail.com, <sup>3</sup>evgen\_pros@mail.ru

A new exact solution of the two-dimensional Oberbeck–Boussinesq equations has been found. The analytical expressions of the hydrodynamic fields, which have been obtained, describe convective Couette flow. Fluid flow occurs in the case of nonuniform distribution of velocities and the quadratic heat source at the upper boundary of an infinite layer of viscous incompressible fluid. Two characteristic scales have been introduced for finding the exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations. Using the anisotropic layer allows one to explore large-scale flows of liquids for large values of the Grashof number. A connection is shown between solutions describing the quadratic heating of boundaries with boundary problems concerned with motions of fluids in which the temperature is distributed linearly. Analysis of polynomial solutions describing the natural convection of the fluid is presented. The existence of points at which the hydrodynamic fields vanish inside the fluid layer. Thus, the above class of exact solutions allows us to describe the counterflows in the fluid and the separations of pressure and temperature fields.

MSC 2010: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

Keywords: Couette flow, linear heating, quadratic heating, convection, exact solution, polynomial solution

Received June 22, 2015, accepted May 14, 2016

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 167–178 (Russian)